

تاریخ دریافت مقاله: ۹۳/۱۲/۱۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۳/۱۲/۲۴

فصلنامه تخصصی روان سنجی

دوره دوم، شماره ۷، زمستان ۱۳۹۲

صفحات: ۱۰۷-۱۲۵

مقایسه ضرایب همبستگی پیرسون، اسپیرمن و کندال در یک مطالعه

شبیه سازی

Comparison of Correlation Coefficients' Pearson, Spearman and Kendall in a Simulation Study

میترا رحیم زاده^۱، محمد امین پور حسینقلی^۲، بهروز کاوه‌ئی^{۳*}

چکیده

Abstract

Introduction: The relationship between the two variables can be defined as the intensity and direction of correlation between the two. If the two variables have the same direction, there is a direct correlation between them. Otherwise, the correlation is indirect. This study aims at comparing three correlation coefficients used mainly by medical researchers. **Methods:** In this article, we focused on the three correlation coefficients accessible through the same paths in the SPSS and SAS packages. These include

مفهوم رابطه بین دو متغیر را می توان شدت و جهت همبستگی دو متغیر نامید. در صورتی که جهت تغییر دو متغیر یکسان باشد، بین دو متغیر همبستگی مستقیم و در صورتی که جهت دو متغیر مخالف باشد، بین دو متغیر همبستگی معکوس وجود خواهد داشت. هدف از این مطالعه مقایسه سه ضریب همبستگی است که بیشتر مورد استفاده محققین هستند. روش: در این مقاله ما سه ضریب همبستگی که در نرم افزارهای SAS و SPSS در یکجا قابل دستیابی هستند، انتخاب کرده ایم که عبارتند از

۱. استادیار آمار زیستی، مرکز تحقیقات عوامل اجتماعی موثر بر سلامت، دانشگاه علوم پزشکی البرز، کرج، ایران

۲. استادیار آمار زیستی، مرکز تحقیقات کبد و گوارش، دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی، تهران، ایران

۳*. نویسنده مسئول، استادیار آمار زیستی، سازمان سنجش کشور، تهران، ایران KavehieBehrooz@Yahoo.com

Pearson, Spearman and Kendall's tau. Results: To compare these correlation coefficients, a simulation study has been conducted showing that if the assumption of normality is to be true, Pearson correlation is preferred, but if the normality assumption is violated, one of the nonparametric coefficients of Spearman or Kendall's tau might be used. Discussion and Conclusion: According to the scatter plot and measurement scale of variables, appropriate correlation coefficients can be used to assess the intensity of correlation between the variables.

Key Words: Correlation Coefficient, Pearson, Spearman, Kendall, Simulation.

ضریب همبستگی پیرسون، اسپیرمن و تاوی کندال. نتایج: برای مقایسه این ضرایب همبستگی شبیه سازی انجام شده است که نشان می دهد در صورت برقراری فرض نرمال بودن، ارجحیت با ضریب همبستگی پیرسون است ولی در صورت عدم برقراری فرض نرمال می توان یکی از ضرایب ناپارامتری اسپیرمن یا کندال را مورد استفاده قرار داد. بحث و نتیجه گیری: با توجه به نمودار پراکنش و مقیاس اندازه گیری متغیرها می توان از ضریب همبستگی مناسب برای اندازه گیری شدت همبستگی بین متغیرها استفاده نمود.

کلید واژه ها: ضریب همبستگی، پیرسون، اسپیرمن، تاوی کندال، شبیه سازی

مقدمه

دو متغیر X و Y را همبسته گویند وقتی که تغییر در مقدار یکی همراه با تغییر در توزیع دیگری باشد. دو متغیر X و Y را مستقل از هم گویند اگر با تغییر در مقدار یکی توزیع دیگری تغییری نکند. شدت و جهت وابستگی خطی دو متغیر را به همدیگر همبستگی گویند. هرچه دو متغیر بیشتر به همدیگر وابسته باشند، میزان همبستگی آنها هم بیشتر خواهد بود. شایان ذکر است که برای تصمیم گیری علاوه بر شدت وابستگی دو متغیر، جهت همبستگی هم مهم می باشد. برای اینکه ضریب همبستگی بین دو متغیر X و Y قابل قبول باشد باید در شرایط زیر صدق کند:

۱- اندازه همبستگی باید فقط مقادیر بازه $[-1, +1]$ را بپذیرد.

۲- اگر مقادیر بزرگ X گرایش داشته باشند که با مقادیر بزرگ Y در یک جفت قرار بگیرند و در نتیجه مقادیر کوچک X هم با مقادیر کوچک Y در یک جفت قرار بگیرند، آنگاه اندازه‌ی ضریب همبستگی باید مثبت و در صورت قوی بودن گرایش به $+1$ نزدیک باشد در این صورت می‌گوییم بین X و Y همبستگی مستقیم وجود دارد.

۳- اگر مقادیر بزرگ X گرایش داشته باشند که با مقادیر کوچک Y در یک جفت قرار بگیرند و برعکس، آنگاه باید اندازه‌ی همبستگی منفی و در صورت قوی بودن گرایش به -1 نزدیک باشد در این صورت می‌گوییم بین X و Y همبستگی معکوس وجود دارد.

۴- اگر مقادیر X و Y بطور تصادفی در یک جفت قرار بگیرند، اندازه همبستگی باید خیلی به صفر نزدیک باشد و این باید حالتی باشد که X و Y از هم مستقل یا ناهمبسته هستند.

اگرچه ضرایب همبستگی یکی از پرکاربردترین روش‌های آماری هستند که توسط محققین علوم پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرند ولی استفاده نابجا و تعبیر نادرست از آنها موجب استنباط‌های غلط و گمراه کننده می‌شود. لذا در این نوشتار به نکاتی که هنگام استفاده از این ضرایب ضروری است پرداخته شده و در یک مطالعه شبیه‌سازی در داده‌هایی که دارای توزیع توام نرمال و لگ-نرمال^۱ هستند، این ضرایب را با هم مقایسه کنیم.

همبستگی بین دو متغیر می‌تواند به کمک شاخص‌های (ضرایب) مختلفی اندازه‌گیری شود. سه نوع متداول و پر کاربرد آنها عبارتند از: ۱- ضریب همبستگی گشتاور حاصل ضریب پیرسون^۲ که بطور خلاصه از آن تحت عنوان ضریب همبستگی پیرسون یاد می‌شود در سال ۱۸۹۶ توسط کارل پیرسون ارائه شده است (پیرسون^۳، ۱۹۲۰: ۲۵). این ضریب درجه ارتباط خطی بین دو متغیر را اندازه‌گیری می‌کند. این ضریب مقادیر بین $+1$ و -1 را می‌گیرد که این مقادیر فرین تنها وقتی به دست می‌آیند که نقاط دقیقاً روی خط راستی غیر موازی با محورها قرار داشته باشند. در صورتی که نقاط دقیقاً بر روی خطی موازی یکی از محورها قرار داشته باشند، مخرج کسر صفر شده و محاسبه ضریب همبستگی پیرسون غیر ممکن خواهد بود. ۲- ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن^۴

1. Log-Normal

2. Pearson product moment correlation coefficient

3. Pearson

4. Spearman's rank-order correlation

که اولین بار توسط چارلز اسپیرمن^۱ ارائه شد (اسپیرمن، ۱۹۰۴: ۷۲). ۳- ضریب همبستگی تاوی کندال^۲ که اولین بار توسط کندال^۳ معرفی شد (کندال، ۱۹۳۸: ۸۱). دو نوع مختلف از ضریب همبستگی تاوی کندال تحت عنوان نوع b و نوع c وجود دارد که تفاوتشان در نوع برخورد با مشاهدات گره دار است. در این مقاله ما تاوی کندال b را مد نظر قرار داده ایم.

روش پژوهش

ضریب همبستگی پیرسون:

هنگامی که متغیرها در مقیاسی اندازه گیری شده اند که فاصله در آن معنا دارد، می توان ضریب همبستگی پیرسون را محاسبه کرد که قدرت رابطه خطی بین دو متغیر را محاسبه می کند. بهتر است قبل از اقدام برای محاسبه این ضریب نمودار پراکنش برای دو متغیر رسم شود. هنگامی که در یک نمودار پراکنش نقاط حول یک خط صاف تجمع پیدا کنند، نشان دهنده رابطه خطی بین آن دو متغیر است.

برای محاسبه ضریب همبستگی پیرسون علاوه بر پیش فرض کمی بودن (مقیاس اندازه گیری نسبتی یا فاصله ای) دو متغیر فرض نرمال بودن توام دو متغیر نیز وجود دارد، که کمتر مورد توجه بوده است (کوین^۴، ۲۰۰۲: ۷۲). در صورتی که توزیع توام دو متغیر نرمال باشد، صفر بودن میزان این ضریب به معنی استقلال آن دو است (مونتگمری^۵، ۲۰۱۱: ۱۷۹). در صورتی که فرض نرمال بودن توزیع توام دو متغیر برقرار نباشد، صفر بودن این ضریب فقط به معنی نبودن رابطه خطی بین دو متغیر است و نمی توان درباره استقلال و یا عدم استقلال بحثی نمود. در این گونه مواقع معمولاً اعلام می شود که دو متغیر ناهمبسته هستند و یا رابطه خطی بین آن دو وجود ندارد. این ضریب همبستگی مبتنی بر کواریانس دو متغیر و انحراف معیارهای آنها می باشد که می توان از برآوردهای آنها برای محاسبه ضریب همبستگی پیرسون با فرمول $r_p = \frac{\text{Cov}(x,y)}{s_x s_y}$ استفاده کرد. بطوری که $\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$ و s_x ، s_y به ترتیب انحراف معیار متغیر X و Y می باشند.

1. Charles Spearman
2. Kendall's tau correlation
3. Kendall
4. Quinn
5. Montgomery

مثبت بودن این ضریب به مفهوم رابطه مستقیم دو متغیر و منفی بودن آن به معنی رابطه معکوس بین دو متغیر می‌باشد.

ضریب همبستگی اسپیرمن: این ضریب همبستگی، معادل ضریب همبستگی پیرسون در داده‌های کیفی است با این تفاوت که این ضریب مبتنی بر رتبه افراد محاسبه می‌شود. اگرچه این ضریب همبستگی بعنوان جانشینی برای ضریب همبستگی پیرسون شناخته شده است ولی مانند ضریب همبستگی پیرسون فقط به رابطه خطی بودن حساس نیست بلکه قادر به شناسایی هر گونه رابطه یکنواپی که بصورت صعودی یا نزولی باشد نیز است. اگرچه این ضریب از نوع ناپارامتری است و برای محاسبه آن نیاز به مفروضاتی در رابطه با توزیع چگالی متغیرها وجود ندارد ولی یادآوری این نکته ضروری است که انتخاب این آزمون به شرایطی نیاز دارد که در صورت نبودن آن شرایط، نتایج تحقیق را با انحرافات جدی روبه‌رو می‌کند. از جمله شرایط این آزمون آن است که دو متغیر می‌باید رده‌های زیادی داشته باشند تا رتبه‌بندی افراد مفهوم پیدا کند و چنانچه تعداد رده‌های متغیری اندک باشد، به علت اینکه تعداد زیادی از افراد در یک رتبه قرار می‌گیرند، اجرای این آزمون امکان پذیر نیست و نتایج قابل اتکا نخواهند بود (حسینی، ۱۳۸۲: ۲۱۷). موارد استفاده از این ضریب معمولاً هنگامی است که پیش شرط نرمال بودن توزیع برای داده‌های کمی به اثبات نرسیده باشد و یا مقیاس اندازه‌گیری داده‌ها رتبه‌ای باشد. ضریب همبستگی اسپیرمن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(۱) r_s = 1 - \frac{6 \sum_i d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

که در آن $\sum_i d_i^2$ مجموع مجذور تفاوت دو رتبه و n حجم نمونه می‌باشد. رابطه بالا در صورتی که رتبه‌های گره‌دار وجود داشته باشد، بصورت زیر اصلاح می‌شود.

$$r_s = \frac{1}{2\sqrt{S_{Xa} \times S_{Ya}}} \{S_{Xa} + S_{Ya} - \sum_i d_i^2\} \quad (۲)$$

بطوری که

$$S_{Xa} = S_X - \sum_k \frac{k(k^2 - 1)}{12} = \frac{1}{12} \left\{ n(n^2 - 1) - \sum_k k(k^2 - 1) \right\}$$

$$S_{Ya} = S_Y - \sum_m \frac{m(m^2 - 1)}{12} = \frac{1}{12} \left\{ n(n^2 - 1) - \sum_m m(m^2 - 1) \right\}$$

که در آن K تعداد موارد گره‌دار در متغیر X و m تعداد موارد گره‌دار در متغیر Y است.

تاوی کندال: برای محاسبه این ضریب هر زوج به صورت هماهنگ، ناهماهنگ و گره‌دار بر اساس رتبه مشخص می‌شود. زوجهای هماهنگ، زوجهایی هستند که هر دو با هم رتبه‌اشان افزایش یا کاهش می‌یابد. زوجهای ناهماهنگ، زوجهایی هستند که در صورت افزایش رتبه یکی، رتبه دیگری کاهش می‌یابد و زوجهای گره‌دار، زوجهایی هستند که رتبه یکی یا هر دو ثابت می‌ماند. بنابراین اگر زوجهای هماهنگ، ناهماهنگ را به ترتیب با C و D نشان دهیم در صورتی که هیچ زوج گره‌داری وجود نداشته باشد، ضریب همبستگی کندال بصورت زیر به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{C-D}{C+D} = \frac{C-D}{n(n-1)/2} \quad (۳)$$

در صورتی که زوج گره‌دار وجود داشته باشد و تعداد زوج‌های گره‌دار را با T نشان دهیم، به طوری که $N = C + D + T$ کل زوجها باشد. در صورت وجود مشاهدات گره‌دار این ضریب حتی در صورتی که باقی‌مانده زوجها همگی هماهنگ یا ناهماهنگ هم باشند به مقدار +۱ یا -۱ نخواهد رسید. به همین دلیل آماره ارائه شده در رابطه ۳ را برای حالتی که مشاهدات گره‌دار وجود داشته باشد، بصورت زیر اصلاح نموده‌اند.

$$\tau_b = \frac{C - D}{\sqrt{(n(n-1)/2 - t_x)(n(n-1)/2 - t_y)}}$$

به طوری که t_x تعداد مشاهدات گره‌دار در متغیر X و t_y تعداد مشاهدات گره‌دار در متغیر Y است. در واقع این ضریب متوسط درجه توافق را بین رتبه زوج‌ها اندازه‌گیری می‌کند. مشاهدات گره‌دار مشاهداتی هستند که مقدار آنها با هم یکسان است در نتیجه در رتبه‌بندی مقادیر چند مشاهده وجود خواهد داشت که هم رتبه هستند که در این گونه موارد معمول است که از متوسط رتبه‌ها برای رتبه‌بندی استفاده شود و اصطلاحاً گفته می‌شود که مشاهدات گره‌دار هستند. در نرم افزار SPSS از همین فرمول اصلاح شده برای محاسبه تاوی کندال استفاده می‌شود.

این نوع تاوی کندال که به تاوی کندال τ_b نیز معروف است معمولاً در جداول مربعی مورد

استفاده قرار می‌گیرد اگرچه منعی برای استفاده آن در جداول غیر مربعی وجود ندارد. مقدار این ضریب همبستگی در جداول مربعی بزرگتر از مقدار ضریب کندال^۱ است در صورتی که در جداول غیر مربعی مقدار آن کوچکتر به دست می‌آید. ضریب کندال^۲ که ضریب تاوی کندال-استوارت^۱ نیز نامیده می‌شود همانند ضریب کندال^۲ اختلاف بین زوج‌های هماهنگ و ناهماهنگ را در عبارتی ضرب می‌کند که بر اساس اندازه جدول غیر مربعی بصورت زیر اصلاح می‌شود. بطوری که در آن C و D به ترتیب زوجهای هماهنگ، ناهماهنگ، n تعداد مشاهدات و m مینیمم سطر و ستون در جدول توافقی می‌باشد.

$$\tau_c = (C - D) [2m/n^2 (m - 1)]$$

در صورتی که هیچ مشاهده گره‌داری وجود نداشته باشد هر دو ضریب تاوی کندال^۲ و تاوی کندال^۲ معادل هم خواهند بود. (اسماعیلیان، ۱۳۸۷: ۱۲۹)

اگرچه ضریب همبستگی کندال کمتر از ضریب همبستگی اسپیرمن مورد استفاده قرار می‌گیرد ولی هر دو ضریب به یک میزان از اطلاعات موجود در داده‌ها استفاده می‌کنند بنابراین هر دو ضریب به یک نسبت به شناسایی وجود رابطه حساسیت دارند. این بدان معناست که برای یک سری داده هر دو ضریب همبستگی منجر به رد شدن فرض صفر استقلال بین دو متغیر رتبه‌ای در یک سطح معنی‌داری خواهند شد. اگرچه دارای مقیاس‌های اندازه‌گیری مختلفی برای میزان همبستگی هستند و مقادیر متفاوتی به دست می‌دهند (لاپاتا^۲، ۲۰۰۶: ۴۷۱). رابطه بین این دو ضریب توسط (سیگل^۳، ۱۹۸۸: ۲۳۷) بصورت زیر نشان داده شده است.

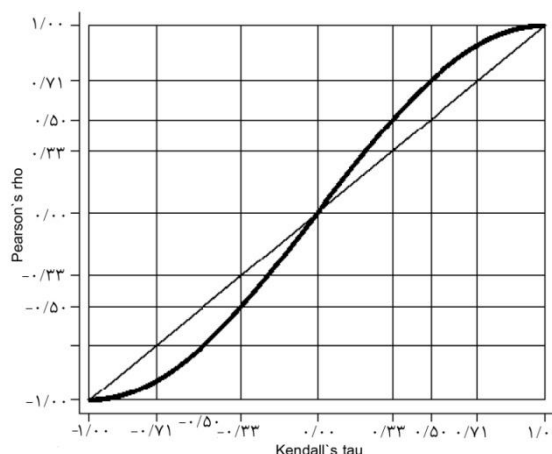
$$-1 \leq 3\tau - 2r_s \leq 1$$

در شرایطی که دو متغیر X و Y از یک توزیع نرمال دو متغیره نمونه‌گیری شده باشند رابطه بین ضریب همبستگی کندال^۲ و ضریب همبستگی پیرسون بر اساس رابطه گرینر^۴ بصورت زیر خواهد بود.

$$\rho_{XY} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau_{XY}\right)$$

-
1. Stewart
 2. Lapata
 3. Sigel
 4. Greiner

این رابطه توسط کندال مورد کنکاش بیشتری قرار گرفته است و در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می شود که مقادیر 0 ، $\pm 1/3$ ، $\pm 1/2$ ، ± 1 برای ضریب همبستگی کندال متناظر با مقادیر 0 ، $\pm 1/2$ ، $\pm \sqrt{2}/2$ ، ± 1 به ترتیب برای ضریب همبستگی پیرسون می باشد و این نشان می دهد که مقادیر به دست آمده برای ضریب همبستگی پیرسون بزرگتر از مقادیر به دست آمده برای ضریب همبستگی کندال است (نیوسان^۱، ۲۰۰۲: ۴۵)



شکل شماره ۱: رابطه بین ضریب همبستگی تاوی کندال τ و پیرسون ρ

و در صورت داشتن ضریب همبستگی پیرسون و کندال می توان ضریب همبستگی اسپیرمن را بر اساس فرمول گیلپین^۲ به دست آورد (واکر^۳، ۲۰۰۳: ۵۲۵).

$$\rho = 3 \left[\tau \sin^{-1} \left(\frac{\tau}{3} \right) \right] / \sin^{-1} \tau$$

نحوه ی استفاده و گزارش این ضرایب:

اگرچه ضریب همبستگی پیرسون پرکاربردترین ضریب همبستگی در علوم پزشکی است ولی استفاده نابجا از آن باعث تصمیم گیری های گمراه کننده خواهد شد. هنگام استفاده از این ضریب توجه به نکات زیر ضروری است.

۱- از آن جایی که معنی دار بودن و نبودن ضریب همبستگی به شدت به حجم نمونه مربوط است.

-
1. Newson
 2. Gilpin
 3. Walker

تنها اکتفا کردن به مقدار سطح معنی داری کافی نیست و بهتر است که مقدار آن به همراه فاصله اطمینان مربوطه و حجم نمونه نیز گزارش شود (پورتر^۱، ۱۹۹۹: ۱۲۳). در جدول ۱ حداقل قدر مطلق ضریب همبستگی پیرسون در حجم نمونه‌های کوچک مختلف نشان داده شده است.

جدول شماره ۱: میزان معنی دار ضریب همبستگی در حجم نمونه کوچک

قدر مطلق ضریب همبستگی	۱	۰/۸۹	۰/۷۵	۰/۷۱	۰/۶۸	۰/۶۵	۰/۵	۰/۲	۰/۱
حجم نمونه	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۳	۹۴	۳۹۰

همان طور که در جدول بالا مشاهده می شود با افزایش حجم نمونه هر مقداری از ضریب همبستگی معنی دار خواهد شد ولی آیا این سطح معنی داری ارزشمند است. استفاده از توان دوم این ضریب همبستگی که بیانگر درصد واریانس مشترک بین دو متغیر است نیز کمک کننده خواهد بود (گودوین^۲، ۲۰۰۶: ۲۵۱). همچنین استفاده از جدول ۱ می تواند راهگشا باشد (یودویکیک^۳، ۲۰۰۷: ۵).

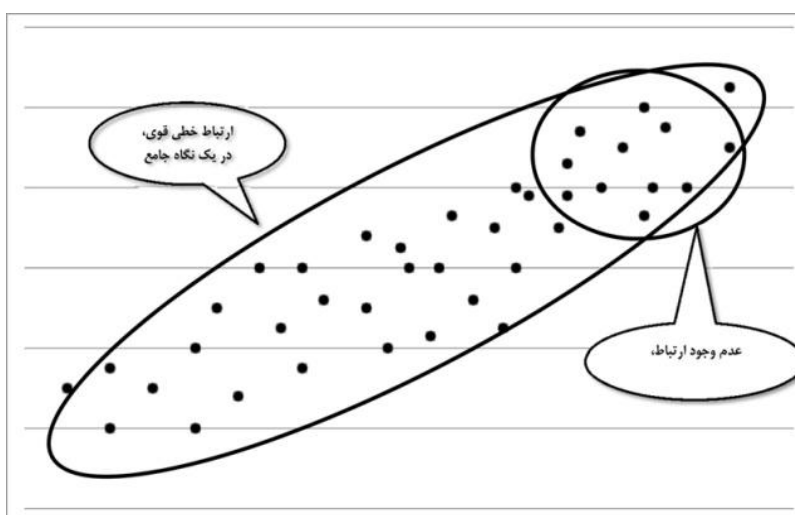
جدول شماره ۲: قدرت رابطه خطی بین دو متغیر

میزان رابطه خطی	قدر مطلق ضریب همبستگی
قوی	بیشتر از ۰/۷۵
متوسط	بین ۰/۷۵ تا ۰/۵
ضعیف	بین ۰/۵ تا ۰/۲۵
ناچیز	کمتر از ۰/۲۵

۲- ضریب همبستگی فقط وجود رابطه خطی بین دو متغیر را نشان می دهد و نباید از آن به اشتباه بعنوان یک رابطه علت و معلول نام برد (پورتر، ۱۹۹۹: ۱۲۳ و سدگویک^۴، ۲۰۱۲: ۴۵۰).

1. Porter
2. Goodwin.
3. Udovičić
4. Sedgwick

۳- هر چقدر دامنه تغییرات اندازه گیری متغیرها بیشتر باشد، این رابطه بصورت قوی تر خود را نشان خواهد داد (هیمن^۱، ۲۰۱۱: ۱۵۳). همانطور که در شکل ۲ مشاهده می شود اگر بعنوان مثال رابطه بین فشار خون و سن را فقط در رده ی سنی ۵۰ تا ۶۰ سال بینم، مقدار به دست آمده برای ضریب همبستگی برآوردی کمتر از مقدار واقعی خواهد داشت.



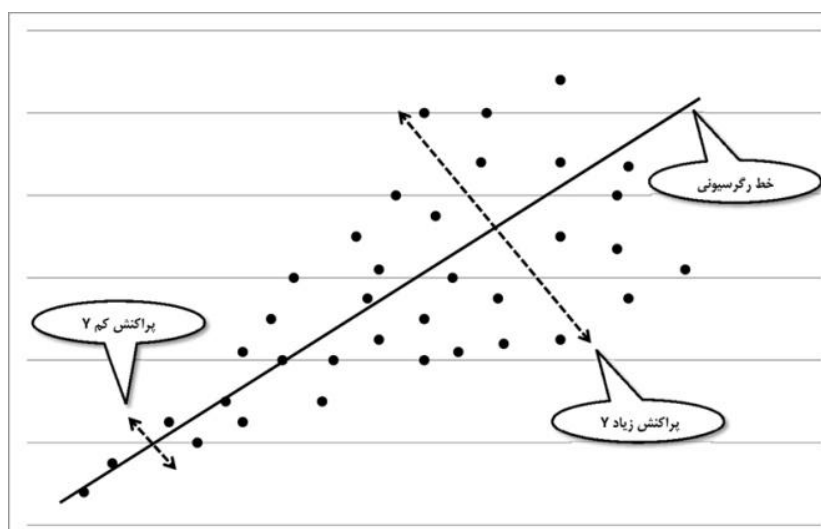
شکل شماره ۲: نمودار پراکنش بین سن و فشار خون

۴- از آن جایی که فرض نرمال بودن توام دو متغیر بعنوان پیش فرضی برای بکار بردن این ضریب در نظر گرفته شده است که امکان ارزیابی این پیش فرض نیز به آسانی وجود ندارد. ولی اثرات عدم برقراری این فرض ممکن است خود را بصورت وجود داده های پرت و یا عدم همگنی واریانس نشان دهد (موکا کا^۲، ۲۰۱۲: ۶۹) که به اثرات هر یک از این موارد در ذیل اشاره شده است.

ضریب همبستگی پیرسون به وجود اثرات داده های پرت حساس است پس بهتر است قبل از بکارگیری آن نمودار پراکنش رسم شده و در صورت وجود داده پرت، محقق باید فرایند جمع آوری و ورود داده ها را بازنگری کرده و اگر هیچ توجیهی برای داده پرت مشاهده شده پیدا نشد از ضرایب جایگزین اسپیرمن و کندال که بر اساس رتبه ها می باشند استفاده نماید.

1. Heiman
2. Mukaka

در صورت عدم همگنی واریانس نیز مقدار این ضریب همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است برای زمانی که مقادیر X و Y کوچک هستند مقدار ضریب همبستگی را بیشتر از میزان واقعی و زمانی که مقادیر X و Y بزرگ هستند مقدار ضریب همبستگی را کمتر از میزان واقعی برآورد خواهد کرد. در چنین مواقعی بهتر است اگر متغیر کمی و یا کیفی وجود دارد که با هر یک از این متغیرها در رابطه است برای از بین بردن اثر متغیر مخدوشگر کمی (فاصله ای یا نسبتی) از ضریب همبستگی جزئی استفاده نمود یا ضریب همبستگی را در سطوح مختلف متغیر مخدوشگر کیفی بکار برد (چن^۱، ۲۰۰۳: ۶۱۴).

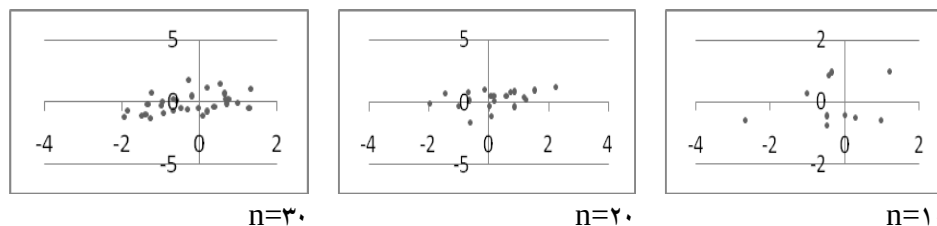
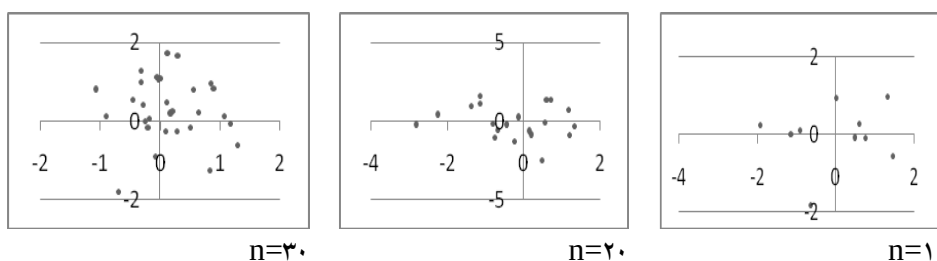


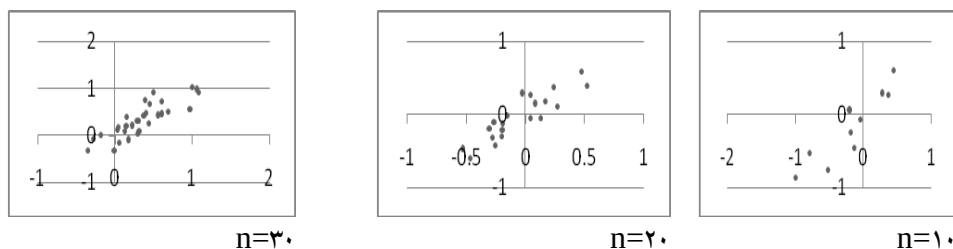
شکل شماره ۳: نمودار پراکنش بین دو متغیر X و Y

نتایج حاصل: برای مقایسه کارایی سه نوع ضریب همبستگی مطالعه شیهه سازی انجام شده است. در این مطالعه داده‌هایی با توزیع توام نرمال دو متغیره و لگ-نرمال دو متغیره را با ضرایب مختلف همبستگی با مقادیر ۰/۱، ۰/۵ و ۰/۹ در حجم‌های مختلف ۱۰، ۲۰ و ۳۰ تولید شد و سپس برای هر یک از نمونه‌های مختلف با استفاده از روش بوت استرپ^۲ (مودلسی، ۲۰۰۳: ۶۵۰) فاصله اطمینان برای هر سه ضریب همبستگی بر اساس نمونه ۱۰۰۰ تایی محاسبه گردید. نمودار پراکنش

1. Chan
2. Bootstrap
3. Mudelsee

برای هر یک از حالات در شکل های ۴ تا ۶ نشان داده شده است، همانطور که در شکل ها نیز مشاهده می شود وقتی مقدار ضریب همبستگی کوچک است حتی با حجم نمونه بزرگی که منجر به معنی داری آماری شود در نمودار پراکنش شواهد کمی از وجود رابطه خطی مشاهده می شود. در صورتی که وقتی ضریب همبستگی به اندازه کافی بزرگ باشد با حجم نمونه مناسب روند خطی در نمودار پراکنش کاملاً مشهود است. شایان ذکر است نمودار پراکنش اولین گام در بررسی رابطه بین دو متغیر است و توصیه می شود در صورتی که هدف به دست آوردن مدل رگرسیون خطی نباشد، این خط در نمودار پراکنش رسم نشود چرا که با رسم این خط در نمودار پراکنش موجب القا وجود رابطه خطی می شود که ممکن است اصلاً وجود نداشته باشد (پورتر، ۱۹۹۹: ۱۲۳).





شکل ۶: نمودار پراکنش برای ضریب همبستگی ۰/۹ با حجم نمونه‌های ۱۰، ۲۰ و ۳۰

نتایج شبیه‌سازی در جداول سه تا پنج نشان داده شده است. همان طور که در جداول ۳ ملاحظه می‌شود، با افزایش حجم نمونه و بدون توجه به میزان همبستگی مقدار انحراف معیار کاهش می‌یابد و فواصل اطمینان به دست آمده بهم نزدیک‌تر می‌شوند. همچنین میزان آریبی و انحراف معیار برای برآورد ضریب همبستگی پیرسون وقتی داده‌ها از توزیع نرمال دو متغیره تولید شده‌اند، در مقایسه با دو برآورد دیگر بدون توجه به میزان همبستگی کوچکتر می‌شود و این نشان می‌دهد که در صورت برقراری پیش فرض نرمال بودن توزیع توام متغیرها استفاده از ضریب همبستگی پیرسون بر دو ضریب همبستگی اسپیرمن و کندال ارجحیت دارد.

جدول شماره ۳: شبیه‌سازی با ضریب همبستگی ۰/۱

حجم نمونه	ضریب همبستگی	مقدار برآورد	انحراف معیار	میزان آریبی	فاصله اطمینان ۹۵٪	مقدار برآورد	انحراف معیار	میزان آریبی	فاصله اطمینان ۹۵٪
توزیع دو متغیره لگ-نرمال					توزیع دو متغیره نرمال				
۱۰	پیرسون	۰/۱۴۲	۰/۲۹۵	-۰/۰۰۵	[-۰/۵۰۹ و ۰/۶۳۸]	۰/۱۷۸	۰/۳۸۲	-۰/۰۰۶	[-۰/۵۹۹ و ۰/۸۳۴]
	اسپیرمن	-۰/۰۵۵	۰/۳۹۱	-۰/۰۱۴	[-۰/۸۲۳ و ۰/۶۹۲]	-۰/۰۵۵	۰/۳۹۱	-۰/۰۱۴	[-۰/۸۱۰ و ۰/۶۷۳]
	کندال	-۰/۰۶۷	۰/۳۲۲	-۰/۰۰۶	[-۰/۷۰۷ و ۰/۵۶۱]	-۰/۰۶۷	۰/۳۲۲	-۰/۰۰۶	[-۰/۷۰۰ و ۰/۵۲۴]
۲۰	پیرسون	-۰/۱۷۱	۰/۱۷۸	-۰/۰۰۷	[-۰/۵۳۰ و ۰/۱۷۴]	-۰/۰۸۳	۰/۱۹۵	۰/۰۰۶	[-۰/۴۲۷ و ۰/۳۱۸]
	اسپیرمن	-۰/۱۷۹	۰/۲۲۸	۰/۰۱۶	[-۰/۶۱۶ و ۰/۳۰۹]	-۰/۱۷۹	۰/۲۳۰	۰/۰۱۶	[-۰/۵۶۷ و ۰/۳۲۳]
	کندال	-۰/۱۲۵	۰/۱۶۷	۰/۰۰۸	[-۰/۴۵۱ و ۰/۲۱۶]	-۰/۱۲۶	۰/۱۶۶	۰/۰۰۱	[-۰/۴۳۰ و ۰/۲۲۲]
۳۰	پیرسون	-۰/۰۷۸	۰/۱۵۸	-۰/۰۰۲	[-۰/۴۳۷ و ۰/۱۶۹]	-۰/۱۷۴	۰/۱۲۹	۰/۰۰۷	[-۰/۴۰۹ و ۰/۰۹۴]
	اسپیرمن	-۰/۱۱۱	۰/۱۸۱	-۰/۰۰۶	[-۰/۴۶۲ و ۰/۲۴۹]	-۰/۱۱۱	۰/۱۸۰	-۰/۰۰۷	[-۰/۴۵۱ و ۰/۲۵۰]
	کندال	۰/۰۹	۰/۲۱۴	۰/۰۰۴	[-۰/۴۷۲ و ۰/۲۹۳]	-۰/۰۹	۰/۱۲۶	-۰/۰۰۷	[-۰/۳۲۷ و ۰/۱۶۳]

از آن جایی که توزیع لگ-نرمال در واقع تبدیل لگاریتمی توزیع نرمال است، پس کافی است برای تولید داده‌ها از توزیع لگ-نرمال داده‌های تولید شده از توزیع نرمال را با تبدیل نمایی به داده‌های لگ-نرمال تبدیل کنیم.

با توجه به نتایج جداول مشاهده می‌شود که برآوردهای به دست آمده چه از توزیع نرمال و چه از توزیع لگ-نرمال برای برآوردهای اسپیرمن و کندال بدون توجه به میزان ضریب همبستگی و حجم نمونه یکسان به دست می‌آید که نشان دهنده این است که تبدیل داده‌ها تحت تابعی که بطور یکنوا صعودی یا نزولی است، تاثیری در میزان برآورد ندارد. ولی تغییرات مربوط به ضریب همبستگی پیرسون قابل پیش‌بینی نیست و فقط انحراف معیارهای برآوردها برای توزیع لگ-نرمال بزرگتر است و فواصل اطمینان به دست آمده از هم دورتر هستند و این نشان می‌دهد در صورتی که پیش‌فرض نرمال بودن داده‌ها مورد شک و تردید باشد نباید از ضریب همبستگی پیرسون استفاده نماییم.

جدول شماره ۴: شبیه‌سازی با ضریب همبستگی ۰/۵

حجم نمونه	ضریب همبستگی	مقدار برآورد	انحراف معیار	فاصله اطمینان ۹۵٪	میزان آریبی	مقدار برآورد	انحراف معیار	فاصله اطمینان ۹۵٪	میزان آریبی
توزیع دو متغیره نرمال					توزیع دو متغیره لگ-نرمال				
۱۰	پیرسون	۰/۲۲۵	۰/۳۰۵	[۰/۵۴۴ و ۰/۶۶۳]	-۰/۰۰۵	۰/۲۵۹	۰/۳۸۱	[۰/۴۹۷ و ۰/۸۳۸]	-۰/۰۶۴
	اسپیرمن	۰/۳۳۳	۰/۳۶۱	[۰/۵۵۵ و ۰/۸۵۷]	-۰/۰۱۸	۰/۳۳۳	۰/۳۴۰	[۰/۴۷۲ و ۰/۸۳۶]	-۰/۰۲۴
	کندال	۰/۲۰۰	۰/۳۱۷	[۰/۵۰۰ و ۰/۷۳۷]	۰/۰۱۳	۰/۲۰۰	۰/۲۹۲	[۰/۴۴۹ و ۰/۷۰۷]	۰/۰۰۷
۲۰	پیرسون	۰/۳۶۶	۰/۱۷۱	[۰/۰۱۶ و ۰/۶۵۱]	۰/۰۰۲	۰/۵۷۲	۰/۲۰۸	[۰/۰۴۱ و ۰/۸۲۳]	-۰/۰۴۶
	اسپیرمن	۰/۳۳۴	۰/۲۲۰	[۰/۱۲۹ و ۰/۷۵۹]	-۰/۰۱۲	۰/۳۳۴	۰/۲۲۲	[۰/۱۳۱ و ۰/۷۰۹]	-۰/۰۱۱
	کندال	۰/۲۴۲	۰/۱۷۰	[۰/۰۹۱ و ۰/۶۱۹]	-۰/۰۱۷	۰/۲۴۲	۰/۱۷۴	[۰/۰۹۴ و ۰/۵۶۳]	۰/۰۰۲
۳۰	پیرسون	۰/۴۵۰	۰/۱۰۴	[۰/۱۵۲ و ۰/۶۰۱]	۰/۰۰۰	۰/۲۳۴	۰/۱۷۲	[۰/۰۴۸ و ۰/۶۰۷]	۰/۰۳۸
	اسپیرمن	۰/۴۸۷	۰/۱۵۱	[۰/۱۵۰ و ۰/۷۲۹]	-۰/۰۰۲	۰/۴۸۷	۰/۱۴۴	[۰/۱۴۵ و ۰/۷۱۷]	-۰/۰۱۲
	کندال	۰/۳۳۳	۰/۱۴۱	[۰/۰۹۸ و ۰/۵۶۳]	-۰/۰۲۲	۰/۳۳۳	۰/۱۴۸	[۰/۰۹۵ و ۰/۵۷۱]	-۰/۰۱۲

جدول شماره ۵: شبیه سازی با ضریب همبستگی ۰/۹

حجم نمونه	ضریب همبستگی	مقدار برآورد	انحراف معیار	فاصله اطمینان ۹۵٪	میزان اریبی	مقدار برآورد	انحراف معیار	فاصله اطمینان ۹۵٪	میزان اریبی
توزیع دو متغیره نرمال					توزیع دو متغیره لگ-نرمال				
۱۰	پیرسون	۰/۹۱۵	۰/۰۵۷	[۰/۷۶۷ و ۰/۹۸۲]	-۰/۰۰۴	۰/۹۲۹	۰/۰۶۱	[۰/۷۹۶ و ۰/۹۸۱]	-۰/۰۰۴
	اسپیرمن	۰/۸۹۱	۰/۱۳۶	[۰/۶۷۳ و ۰/۱۰۰]	-۰/۰۴۱	۰/۸۹۱	۰/۱۳۰	[۰/۴۷۵ و ۰/۱۰۰]	-۰/۰۴۰
	کندال	۰/۷۳۳	۰/۱۶۶	[۰/۳۳۳ و ۰/۱۰۰]	-۰/۰۰۱	۰/۷۳۳	۰/۱۶۲	[۰/۳۵۰ و ۰/۱۰۰]	۰/۰۰۰
۲۰	پیرسون	۰/۸۹۱	۰/۰۴۳	[۰/۷۷۶ و ۰/۹۵۳]	-۰/۰۰۲	۰/۸۸۰	۰/۰۵۴	[۰/۷۴۹ و ۰/۹۵۴]	-۰/۰۰۱
	اسپیرمن	۰/۸۸۳	۰/۰۷۱	[۰/۶۸۱ و ۰/۹۵۶]	-۰/۰۲۲	۰/۸۸۳	۰/۰۶۸	[۰/۶۹۱ و ۰/۹۵۳]	-۰/۰۲۲
	کندال	۰/۷۰۵	۰/۱۲۹	[۰/۴۹۲ و ۰/۸۶۲]	۰/۰۰۳	۰/۷۰۵	۰/۰۹۰	[۰/۵۰۰ و ۰/۸۵۶]	۰/۰۰۲
۳۰	پیرسون	۰/۸۵۵	۰/۰۴۱	[۰/۷۴۴ و ۰/۹۲۲]	-۰/۰۰۱	۰/۸۴۱	۰/۰۶۲	[۰/۶۹۲ و ۰/۹۳۳]	-۰/۰۰۷
	اسپیرمن	۰/۸۸۲	۰/۰۴۷	[۰/۷۵۰ و ۰/۹۳۳]	-۰/۰۱۵	۰/۸۸۲	۰/۰۴۵	[۰/۷۶۴ و ۰/۹۳۴]	-۰/۰۱۷
	کندال	۰/۷۱	۰/۰۵۷	[۰/۵۸۶ و ۰/۸۱۱]	۰/۰۰۱	۰/۷۱۰	۰/۰۵۶	[۰/۵۹۷ و ۰/۸۱۳]	-۰/۰۰۱

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله به مزایا و معایب هر یک از ضرایب همبستگی پیرسون، اسپیرمن و کندال پرداختیم. برای اندازه گیری شدت رابطه بین دو متغیر کمی، اولین گام رسم نمودار پراکنش است که به شناسایی یک رابطه خطی بین دو متغیر یا یک رابطه یکنوا کمک می کند همچنین این نمودار به شناسایی مقادیر پرت و فرض عدم همگنی واریانس ها کمک می کند. در صورتی که پیش فرض های ضریب همبستگی پیرسون یعنی مقیاس اندازه گیری حداقل فاصله ای، نبودن مشاهدات پرت و فرض همگنی واریانس ها برقرار باشد به سایر ضرایب همبستگی (اسپیرمن و کندال) ارجحیت دارد. در غیر این صورت استفاده از ضرایب همبستگی اسپیرمن و کندال توصیه می شود و در صورتی که تعداد رتبه ها زیاد نبود استفاده از ضریب همبستگی کندال توصیه می شود.

هنگام گزارش وجود رابطه همبستگی فقط به سطح معنی داری اشاره نکنیم بلکه علاوه بر مقدار آن، گزارش کردن حجم نمونه و فاصله اطمینان نیز ضروری است.

در محاسبه ضرایب همبستگی هیچ یک از متغیرها بعنوان متغیر مستقل یا وابسته در نظر گرفته نمی شوند، پس در هنگام تفسیر نتایج حاصل از آنها دقت داشته باشیم که از آن بعنوان رابطه علت

و معمولی استفاده نماییم.

اگرچه ضریب همبستگی ناپارامتری اسپیرمن بعنوان جایگزینی برای ضریب همبستگی پیرسون ارائه شده است ولی با معنی دار بودن ضریب همبستگی اسپیرمن نمی توان استنباطی در رابطه با معنی دار بودن و نبودن ضریب همبستگی پیرسون و برعکس انجام داد (هایکه^۱، ۲۰۱۱: ۸۷).

در مطالعه شبیه سازی شده ای که برای داده های رتبه ای انجام گرفت نشان داده شد که همگی این ضرایب همبستگی برآوردی کمتر از میزان واقعی به دست می دهند. اگرچه با افزایش تعداد رتبه ها از میزان ارببی کاسته می شود و ضریب همبستگی پیرسون بهتر از ضریب همبستگی اسپیرمن عمل می کند (گوکتاس^۲ و ایسکی^۳، ۲۰۱۱: ۱۷).

در مطالعه شبیه سازی شده ای که بر روی نیرومند^۴ بودن ضرایب همبستگی ناپارامتری (اسپیرمن و کندال) نسبت به داده های پرت انجام گرفت، ضریب همبستگی کندال دارای برآوردی نیرومندتر بود و کارایی اش نیز کمی بهتر بود (کروکس^۵ و دهن^۶، ۲۰۱۰: ۴۹۷).

یکی دیگر از موارد کاربرد غلط ضریب همبستگی پیرسون، هنگامی است که می خواهیم میزان توافق دو متد اندازه گیری را ارزیابی کنیم. برای اینکار به اشتباه از میزان بالای همبستگی موجود بین مقادیر به دست آمده بعنوان درجه توافق دو متد اندازه گیری استفاده می شود در صورتی که ضریب محاسبه شده شدت یک رابطه خطی بین دو متد را اندازه گیری می کند. اساسا ضریب همبستگی پیرسون برای این منظور معرفی نشده است زیرا ممکن است یکی از متدها به صورت سیستماتیک مقادیر بزرگتر (کوچکتر) تولید کرده باشد که نتیجه آن عدم توافق را نشان می دهد ولی تاثیری بر مقدار ضریب همبستگی نخواهد داشت (بوویک^۷، ۲۰۰۳: ۴۵۱).

اگرچه حجم نمونه اثر کمی بر روی مقدار ضریب همبستگی دارد ولی از آنجایی که تاثیر به سزایی بر روی سطح معنی داری دارد، در نتیجه سطح معنی داری دو مطالعه با حجم نمونه های مختلف را نباید با هم مقایسه نمود (گین گریچ^۸، ۱۹۹۲: ۸۲۸).

-
1. Hauke
 2. Göktaş
 3. İşçi
 4. Robust
 5. Croux
 6. Dehon
 7. Bewick
 8. Gingrich

نتیجه گیری: از آن جایی که روش های آماری بهترین ابزار برای ارائه صحیح نتایج یک پژوهش می باشند هنگام استفاده از آنها توجه به پیش فرض ها ضروری است. همچنین محققین حوزه های مختلف پزشکی باید با توجه به ماهیت داده های به دست آمده هنگام استفاده از روش های آماری به محدودیت های این روش ها آگاهی کامل داشته باشند تا بتوانند ضمن بکارگیری بجا از آن ها، قضاوتی مبتنی بر دانش صحیح در برخورد با نتایج به دست آمده داشته باشند.

منابع

حسینی، سید یعقوب (۱۳۸۲). آمار ناپارامتریک: انتشارات علامه طباطبائی

اسماعیلیان، مهدی (۱۳۸۷). راهنمای جامع SPSS 14: انتشارات دیباگران تهران

Pearson, K (1920). **Notes on the history of correlation**. *Biometrika*, 13: 25–45.

Spearman, CE (1904). The proof and measurement of association between two things. *Am J Psychol*, 15: 72–101.

Kendall, MG (1938). **A new measure of rank correlation**. *Biometrika*, 30: 81–89

Quinn, GP and Keough, MJ (2002). **Experimental Design and Data Analysis for Biologists**. Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo.

Montgomery, DC and Runger, GC (2011). **Applied Statistics and Probability for Engineers**. John Wiley & Sons, Inc

Lapata, M (2006). Automatic Evaluation of Information Ordering: Kendall's Tau. *Association for Computational Linguistics*, 32: 471–484

- Sigle, S and Castellan, NJ (1988). **Non Parametric Statistics for the Behavioral Sciences**. McGraw-Hill, New York.
- Newson, R (2002). Parameters behind “nonparametric” statistics: Kendall’s tau, Somers’ D and median differences. *The Stata Journal*, 2:45-64
- Walker, DA (2003). Converting Kendall’s Tau For Correlational Or Meta-Analytic Analyses. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 2: 525-530
- Porter, AMW(1999). Misuse of correlation and regression in three medical journals. *J R Soc Med*,92: 123-128.
- Goodwin, LD and Leech, AL (2006). Understanding Correlation: Factors That Affect the Size of r. *The Journal of Experimental Education*, 74: 251–266
- Udovičić, M., Baždarić .K, Bilić-Zulle L., Petrovečki M (2007). What we need to know when calculating the coefficient of correlation? *Biochemia Medica*,17(1): 5-10.
- Sedgwick, P (2012) .**Pearson’s correlation coefficient**.*BMJ* 345:e4483
- Heiman, GW (2011) . **Basic Statistics for the Behavioral Sciences**. USA: Wadsworth.
- Mukaka, MM (2012). Statistics Corner: A guide to appropriate use of Correlation coefficient in medical research. *Malawi Medical Journal*; 24(3): 69-71
- Chan, YH (2003). Biostatistics 104: Correlation Analysis. *Singapore Med J*, 44: 614-619,
- Mudelsee, M (2003). Estimating Pearson’s Correlation Coefficient With Bootstrap Confidence Interval From Serially Dependent Time Series,. *Mathematical Geology*, 6: 650-665.

- Hauke, J and Kossowski, T (2011). Comparison of Values of Pearson's and Spearman's Correlation Coefficients on the Same Sets of Data Questioners. *Eographicae*, 30: 87-93
- Göktaş, A and İşçi, O (2011). A Comparison of the Most Commonly Used Measures of Association for Doubly Ordered Square Contingency Tables via Simulation. *Metodološki zvezki*, 8: 17-37
- Croux, C and Dehon, C (2010). **Influence functions of the Spearman and Kendall correlation measures**, 19: 497-515,
- Bewick, V., Cheek, L and Ball, J (2003). Statistics Review 7: *Correlation and Regression. Critical Care* , 7: 451-459
- Gingrich, P (1992). **Introductory statistics for the social sciences**, Regina.